Devoir non surveillé 5 (pour le vendredi 9 octobre 2015)

☒ Exercice 1 : à la demande générale, le surbooking

Il arrive assez souvent que le nombre de réservations pour une liaison aérienne soit supérieur au nombre de passagers se présentant effectivement le jour du vol. Cela est dû à des empêchements imprévisibles de certains passagers et à une politique systématique de certains d'entre eux qui réservent des places sur plusieurs vols de façon à choisir au dernier moment celui qui leur convient le mieux (en raison de la concurrence, et selon les tarifs choisis, les compagnies ne pénalisent pas les clients qui se désistent et ne font payer effectivement que ceux qui embarquent). Pour compenser ce phénomène, une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considère que les passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 0,1. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et X_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol.
Justifier la loi de X_n et déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaitre le nombre maximal N de réservations possibles pour que la probabilité que plus de 300 passagers se présentent à l'embarquement ne dépasse pas 0,05.

a. Montrer que le nombre N cherché est le plus grand entier tel que : $P(X_N \leqslant 300) > 0{,}95$.

b. On effectue une simulation avec le logiciel Xcas, le nombre de réservations acceptées est 330 pour un vol de 300 places.
La probabilité qu'un passager soit présent à l'embarquement est 0,9.
On simule 1000 vols pour afficher le pourcentage des vols en surnombre.

```
NbVols:=1000;
p:=0.9;
Nbreservations:=330;
NbMaxPassagers:=300;
SurNombre:=0;
pour vol de 1 jusque NbVols faire
    presents:=0;
    pour passagers de 1 jusque Nbreservations faire
         si rand()<=p alors
              presents:=presents+1;
         fsi;
    fpour;
    si presents>NbMaxPassagers alors
       SurNombre:=SurNombre+1;
    fsi;
fpour;
print("le pourcentage de vols en surnombre est ",SurNombre/NbVols*100.0,"%");
```

```
"le pourcentage de vols en surnombre est ",23.5,"%"

Temps mis pour l'évaluation: 1.953
```

(i) Quel est le rôle de la première boucle **pour** ? (**pour** vol …)
(ii) Quel est le rôle de la deuxième boucle **pour** imbriquée ? (**pour** passagers …)
(iii) Expliquer le test : si **rand()<=p**.
(iv) Quelles instructions permettent de compter les vols en surnombre ?

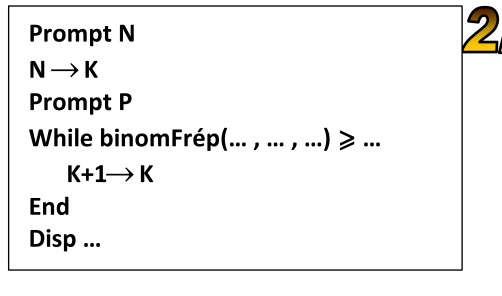
c. On reprend les simulations avec un tableur, 1000 simulations avec 107 réservations et le nombre de places est 100.
La probabilité de présence d'un passager est encore 0,9.

	A	B	C	D	E
1		passagers	N°1	N°2	N°3
2	Vol 1	97	0,061	0,075	0,156
3	Vol 2	96	0,471	0,050	0,691
4	Vol 3	100	0,686	0,751	0,006
5	Vol 4	103	0,091	0,064	0,760
6	Vol 5	93	0,629	0,935	0,700
7	Vol 6	97	0,255	0,820	0,483
8	Vol 7	97	0,908	0,556	0,116
9	Vol 8	99	0,825	0,055	0,611
10	Vol 9	95	0,233	0,440	0,941
11	Vol 10	101	0,835	0,369	0,560
12	Vol 11	101	0,012	0,491	0,991

DC	DD	DE	DF
N°105	N°106	N°107	
0,542	0,636	0,359	
0,316	0,944	0,145	
0,009	0,721	0,563	
0,542	0,638	0,533	
0,075	0,074	0,428	
0,057	0,123	0,605	
0,366	0,302	0,714	
0,030	0,021	0,707	
0,401	0,799	0,750	
0,625	0,543	0,463	
0,855	0,113	0,372	

(i) Quelle formule permet d'avoir un nombre aléatoire entre 0 et 1 dans les cellules **C2** et suivantes ?
(ii) Donner la formule de la cellule **B2** qui permet de déterminer combien de cellules de **C2** à **DE2** contiennent un nombre inférieur à 0,9. (Regarder le mode d'emploi de **NB.SI**)
(iii) Expliquer pourquoi la formule dans **B2** permet de simuler le remplissage d'un vol ?
(iv) Comment peut-on obtenir le pourcentage de vols en surnombre ?

d. On passe enfin à la calculatrice.
Recopier l'algorithme puis compléter les pointillés (sur calculatrice **TI**) pour obtenir le N de la question **a.**
(*attention de vérifier en tapant et testant le programme pour éviter le piège*)



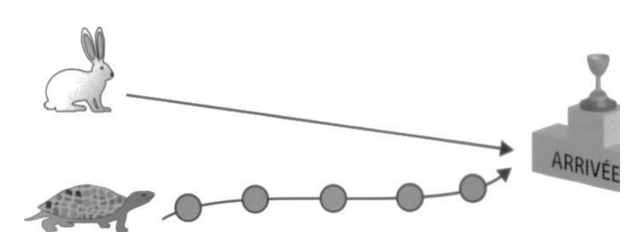
```
Prompt N
N → K
Prompt P
While binomFrép(… , … , …) ⩾ …
    K+1 → K
End
Disp …
```

3. L'A380-800, la version passager, peut transporter 525 (3 classes standards) ou 853 passagers (classe économique unique) suivant la configuration.
Une compagnie affrète des A380-800 en version classe économique unique.
La probabilité qu'une réservation ne soit pas annulée est $p = 0{,}95$.
Combien peut-elle prendre de réservations pour que la probabilité de surnombre soit inférieure à 0,01 ?

☒ Exercice 2 : révision du cours de première (relire le lièvre et la tortue)

Dans une partie de fléchettes un joueur touche la zone centrale de la cible avec une probabilité de 0,1. Le joueur dispose de 6 fléchettes et gagne la partie dès qu'il atteint la zone centrale de la cible.

1. Illustrer par un arbre pondéré les différentes parties possibles.



2. Soit X la variable aléatoire qui à toute partie associe :
- 0 si la zone centrale n'a pas été atteinte ;
- k si la zone centrale a été atteinte à la k-ième fléchette, $1 \leqslant k \leqslant 6$.

Calculer, pour k entier quelconque, $0 \leqslant k \leqslant 6$, $P(X = k)$.
(*Loi de probabilité de* X).

3. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne la partie ?

4. Calculer $E(X)$.

☒ Exercice 3 (recherche d'un minimum : un grand classique)

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2 - 2x$, A est le point de coordonnées $(7 ; 1)$ et M est un point quelconque de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x ; x^2 - 2x)$.
On se propose de déterminer la position du point M tel que la distance AM soit minimale.

1. Étude d'une fonction auxiliaire.
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x - 5$.
a. Déterminer $g'(x)$ puis son signe sur $\mathbb{R}$.
b. Dresser le tableau des variations de g.
c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
d. Démontrer que $2{,}78 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}79$.

2. Recherche du minimum
a. Démontrer que $AM = \sqrt{x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 10x + 50}$.
b. Rappeler le théorème de première sur les variations de la fonction $\sqrt{u}$ où u est une fonction positive.
c. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 10x + 50$.
Déterminer $f'(x)$ puis dresser le tableau des variations de f.
d. En utilisant la question **2.b.**, démontrer que la distance AM est minimale pour $x = \alpha$ où α a été défini à la question **1. d.**

3. Une propriété avec la tangente
On appelle B le point de coordonnées $(\alpha ; \alpha^2 - 2\alpha)$ de la parabole $\mathscr{P}$.
a. Justifier que $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha - 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente T en B à la parabole $\mathscr{P}$.
b. Démontrer que les droites T et (AB) sont orthogonales.

☒ Exercice 4 facultatif pour aller un peu plus loin avec les suites pour le bac

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme U_0 et par la condition : pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n^{\ 2} + U_n$.

1. Démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Démontrer que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = 0$.
3. Démontrer que si $U_0 + U_0^{\ 2} > 0$, alors la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
4. Démontrer par récurrence que si $U_0 + U_0^{\ 2} < 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $-1 < U_n < 0$.
Conclure sur la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.